131, 132, 141, 161 групи «Математичний аналіз»

(доцент Бистрянцева А.М.)

4.1. Інтегрування тригонометричних функцій за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R — раціональна функція від $\sin x$ і $\cos x$, за допомогою *універсальної тригонометричної підстановки* $\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t}$ зводять до інтегралів від раціональних функцій. При цьому використовують співвідношення:

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt\,.}$$

За допомогою запровадженої підстановки зручно знаходити інтеграли вигляду

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}\,. \qquad (*)$$

Проте застосування універсальної підстановки часто приводить до раціональних дробів з великими степенями. Тому в багатьох випадках використовують інші підстановки. Наведемо деякі з них.

4.2. Частинні випадки інтегрування тригонометричних функцій

4.2.1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ залежно від властивості підінтегральної функції зручно раціоналізувати такими підстановками (див. табл. 2.2):

Таблиця 2.2

№	Властивість підінтегральної функції $R(\sin x, \cos x)$	Підстановка
1	непарна відносно $\sin x$: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$\cos x = t$
2	непарна відносно $\cos x$: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$\sin x = t$
3	парна відносно $\cos x$ і $\sin x$ одночасно: $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$	$\operatorname{tg} x = t$

Зокрема, інтеграли $\int R(\sin x)\cos xdx$, $\int R(\cos x)\sin xdx$, $\int R(\operatorname{tg} x)dx$ інтегрують підстановками $\sin x = t$, $\cos x = t$, $\operatorname{tg} x = t$ відповідно.

4.2.2. Інтеграли вигляду $\int \sin^m x\cos^n xdx$ залежно від значень m і n знаходять так (див. табл. 2.3):

Таблиця 2.3

№	Властивість підінтегральної функції $\sin^m x\cos^n x$	Підстановка
1	m — ціле додатне непарне число	$\cos x = t$
2	n — ціле додатне непарне число	$\sin x = t$
3	m, n — цілі додатні парні числа	формули зниження степеня: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
4	m, n — цілі парні числа, але хоча б одне з них від'ємне; m і n — цілі непарні від'ємні числа	$\operatorname{tg} x = t$

4.2.3. Інтеграли вигляду

$$\int \sin mx\cos nxdx,\ \int \sin mx\sin nxdx,\ \int \cos mx\cos nxdx$$

інтегрують шляхом застосування формул перетворення добутку тригонометричних функцій у їх суму:

$$\sin mx\cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\sin mx\sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx\cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x].$$

4.2.4. Інтеграли вигляду

$$\int \operatorname{tg}^n xdx,\ \text{або} \int \operatorname{ctg}^n xdx,$$

де n — ціле додатне число, можуть бути знайдені за допомогою застосування формул $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, або ж за допомогою заміни $\operatorname{tg} x = t$ ($\operatorname{ctg} x = t$).

Знайдіть інтеграли

1. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл вигляду (*). Отже, виконаємо заміну $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Тоді

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x}=\int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int \frac{dt}{\left(5+5t^2-3+3t^2\right)}=$$

$$=\int \frac{dt}{1+4t^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2t)+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

2. $\int \sin^5 x\cos x dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну $\sin x=t$. Тоді

$$\int \sin^5 x\cos x dx=\int \sin^5 x d(\sin x)=\int t^5 dt=\frac{t^6}{6}+C=\frac{\sin^6 x}{6}+C.$$

3. $\int \sin 2x\cos 6x dx$.

Розв'язання. Оскільки $\sin 2x\cos 6x=\frac{1}{2}(\sin 8x-\sin 4x)$, то

$$\int \sin 2x\cos 6x dx=\frac{1}{2}\int (\sin 8x-\sin 4x)dx=-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{8}\cos 4x+C.$$

4. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $R(\sin x,\cos x)=\frac{1}{\sin^3 x\cos x}$ парна відносно $\sin x$ та $\cos x$ одночасно:

$$R(-\sin x,-\cos x)=\frac{1}{(-\sin x)^3(-\cos x)}=\frac{1}{\sin^3 x\cos x}=R(\sin x,\cos x).$$

Тому даний інтеграл зводиться до вигляду $\int R(\operatorname{tg} x)d \operatorname{tg} x$. Враховуючи співвідношення $d \operatorname{tg} x = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ та $1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, одержуємо

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x) d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^3 x} + \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln |\operatorname{tg} x| + C.$$

5. $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$.

Розв'язання. Виконаємо підстановку $\cos x = t$ (див. табл. 2.3). Маємо:

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 \cos^4 x \sin x dx =$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)^2 \cos^4 x d \cos x = -\int (1-t^2)^2 t^4 dt =$$

$$= -\int (1-2t^2+t^4) t^4 dt = -\int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt =$$

$$= -\frac{t^5}{5} + \frac{2}{7} t^7 - \frac{t^9}{9} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{\cos^9 x}{9} + C.$$

6. $\int \cos^4 x dx$.

Розв'язання. Оскільки $m = 0$, $n = 4$ — парне, то застосуємо формулу зниження степеня:

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2x + \cos^2 2x) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}(1+\cos 4x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Тоді

$$\int \cos^4 x dx = \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

7. $\int 32 \sin^6 x \cos^4 x dx$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення

$$32\sin^6 x\cos^4 x = (2\sin x\cos x)^4\cdot 2\sin^2 x = \sin^4 2x(1-\cos 2x) =$$

$$= \sin^4 2x - \sin^4 2x\cos 2x = \frac{1}{4}(1-\cos 4x)^2 - \sin^4 2x\cos 2x =$$

$$= \frac{1}{4}(1-2\cos 4x+\cos^2 4x) - \sin^4 2x\cos 2x =$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{8}(1+\cos 8x) - \sin^4 2x\cos 2x\,.$$

Тоді

$$\int 32\sin^6 x\cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int\cos 4x dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 8x dx -$$

$$-\int \sin^4 2x\cos 2x dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{8}\int \cos 4x d(4x) + \frac{x}{8} + \frac{1}{64}\int\cos 8x d(8x) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\sin^4 2x d(\sin 2x) = \frac{3x}{8} - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x - \frac{1}{10}\sin^5 2x + C\,.$$

9. $\int \mathrm{tg}^5 x dx$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення

$$\int \mathrm{tg}^5 x dx = \int \mathrm{tg}\, x\cdot(\mathrm{tg}^2 x)^2 dx = \int \mathrm{tg}\, x\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)^2 dx = \int\frac{\mathrm{tg}\, x}{\cos^4 x}dx -$$

$$-2\int\frac{\mathrm{tg}\, x}{\cos^2 x}dx + \int \mathrm{tg}\, x dx = \int\frac{\sin x}{\cos^5 x}dx - 2\int \mathrm{tg}\, x d\,\mathrm{tg}\, x + \int\frac{\sin x}{\cos x}dx =$$

$$= -\int\frac{d\cos x}{\cos^5 x} - \mathrm{tg}^2 x - \int\frac{d\cos x}{\cos x} = \frac{1}{4\cos^4 x} - \mathrm{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C\,.$$

10. $\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

парна відносно $\cos x$ і $\sin x$ одночасно:

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\sin x - \cos x)^2} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} = R(\sin x, \cos x).$$

Тому зведемо даний інтеграл до інтеграла відносно змінної $\operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + 1)^2 \cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x + 1)}{(\operatorname{tg} x + 1)^2} = -\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + C.$$

11. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x dx}{(1 - \sin x)^3}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\cos^3 x}{(1 - \sin x)^3}$ непарна відносно $\cos x$:

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{(-\cos x)^3}{(1 - \sin x)^3} = -\frac{\cos^3 x}{(1 - \sin x)^3} = -R(\sin x, \cos x).$$

Тому

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{(1 - \sin x)^3} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t, \\ \cos x dx = dt, \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| = \int \frac{1 - t^2}{(1 - t)^3} dt = \int \frac{1 + t}{(1 - t)^2} dt =$$

$$= \int \frac{(t - 1) + 2}{(t - 1)^2} dt = \int \frac{dt}{t - 1} + 2\int \frac{dt}{(t - 1)^2} = \ln|t - 1| - \frac{2}{t - 1} + C =$$

$$= \ln|\sin x - 1| - \frac{2}{\sin x - 1} + C.$$

12. $\displaystyle\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$.

Розв'язання. Виконаємо заміну $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$. Тоді

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1 + t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx = \int \frac{2-\dfrac{2t}{1+t^2}}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 4\int \frac{(t^2+1)-t}{(t^2+1)(t^2+3)}dt =$$

$$= 4\int \frac{1}{t^2+3}dt - 2\int \frac{dt^2}{(t^2+1)(t^2+3)} = \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} -$$

$$-\int \frac{(t^2+3)-(t^2+1)}{(t^2+1)(t^2+3)}dt^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + \int \frac{d(t^2+3)}{t^2+3} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \ln(t^2+1) + \ln(t^2+3) + C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно дістанемо

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx = \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + \ln(2+\cos x) + C.$$

13. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, можна скористатися універсальною тригонометричною підстановкою $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Покажемо, як цей інтеграл можна знайти іншим способом. Виконаємо перетворення:

$$\frac{\sin x}{1+\sin x} = \frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1.$$

Тоді

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx =$$

$$= -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x + x + C = \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

14. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$.

Розв'язання. Запишемо інтеграл у вигляді

$$\int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}.$$

Оскільки $\sin xdx = -d(\cos x)$, то, запровадивши заміну $\cos x = t$, дістанемо

$$\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} = -\int \frac{(1-t^2)dt}{\sqrt[3]{t^4}} = \int \frac{t^2 dt}{\sqrt[3]{t^4}} - \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^4}} = \int t^{\frac{2}{3}} dt - \int t^{-\frac{4}{3}} dt =$$

$$= \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + 3t^{-\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{5} \cos^{\frac{5}{3}} x + 3\cos^{-\frac{1}{3}} x + C.$$

15. $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

Розв'язання. Застосування підстановок (наприклад, універсальної тригонометричної підстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$) недоцільне, оскільки можна помітити, що $\cos x - \sin x = (\sin x + \cos x)'$. Тоді

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln|\sin x + \cos x| + C.$$

Знайдіть інтеграли від тригонометричних функцій.

1. $\int \sin^3 x \sin 2xdx$. **2.** $\int \cos^4 xdx$. **3.** $\int \sin^3 xdx$.

4. $\int \operatorname{tg}^4 xdx$. **5.** $\int \operatorname{ctg}^6 xdx$. **6.** $\int \sin^3 x \cos^4 xdx$.

7. $\int \sin 6x \sin 4xdx$. **8.** $\int \cos 9x \sin 5xdx$. **9.** $\int \sin 6x \cos^2 xdx$.

10. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{ctg} x}$. **11.** $\int \frac{\sin x + 2\cos 2x}{\cos x - \sin 2x} dx$. **12.** $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

13. $\int \frac{dx}{4+3\operatorname{tg} x}$. **14.** $\int \frac{dx}{8-4\sin x + 7\cos x}$. **15.** $\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin^6 x}$.

16. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^3 x}$. **17.** $\int \operatorname{ctg}^3 xdx$. **18.** $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x}$.

19. $\int \sin x \sin 4x \cos 7xdx$. **20.** $\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin^3 x}$. **21.** $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

22. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. **23.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$. **24.** $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} x}$.

Відповіді

1. $\frac{2}{5}\sin^5 x + C$. **2.** $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$. **3.** $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$. **4.** $-\mathrm{tg}\, x + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + C$. **5.** $-\frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5 x + \frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \mathrm{ctg}\, x - x + C$. **6.** $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C$. **7.** $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{20}\sin 10x + C$. **8.** $\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{28}\cos 14x + C$. **9.** $-\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{32}\cos 8x - \frac{1}{16}\cos 4x + C$. **10.** $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\cos x - \sin x\right| + C$. **11.** $C - \ln\left|\cos x - \sin 2x\right|$. **12.** $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\cos x + \sin x\right| + C$. **13.** $\frac{4}{25}x + \frac{3}{25}\ln\left|4\cos x + 3\sin x\right| + C$. **14.** $\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 5}{\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 3}\right| + C$. **15.** $-\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5 x + C$. **16.** $\frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{2}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{5}{2}\ln\left|\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})\right| + C$. **17.** $-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2 x - \ln\left|\sin x\right| + C$. **18.** $-\frac{1}{4}\mathrm{ctg}^4 x - \mathrm{ctg}^2 x - \ln\left|\mathrm{ctg}\, x\right| + C$. **19.** $\frac{1}{40}\sin 10x + \frac{1}{40}\sin 10x + \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin 12x - \frac{1}{8}\sin 2x + C$. **20.** $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$. **21.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\mathrm{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8})\right| + C$. **22.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{acrtg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\, x) + C$. **23.** $4 \cdot \sqrt[4]{\mathrm{tg}\, x} + C$. **24.** $\frac{4}{25}x - \frac{3}{25}\ln\left|\mathrm{tg}\, x + 2\right| + \frac{2}{5(\mathrm{tg}\, x + 2)} - \frac{3}{25}\ln\left|\cos x\right| + C$.

Інтегрування ірраціональних функцій

5.2. Інтеграли вигляду

$$\int R\left(x,\ \sqrt[m_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n_1}},\ \sqrt[m_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n_2}},\ \ldots,\ \sqrt[m_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n_k}}\right)dx$$

раціоналізуються підстановкою $\boxed{\frac{ax+b}{cx+d} = t^{\lambda}}$, де λ — найменше спільне кратне чисел m_1, m_2, ..., m_k.

Зокрема, інтеграли вигляду $\int R(x,\ \sqrt[m]{x^n})dx$ раціоналізуються підстановкою $\boxed{x = t^m}$.

5.3. Інтегрування диференціальних біномів.

Вираз вигляду $\boxed{x^m (a+bx^n)^p,}$ де m, n, p — раціональні сталі, а a і b — довільні сталі, називають *диференціальним біномом.*

Інтеграл від диференціального бінома $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ виражається через інтеграл від раціональної функції лише у таких трьох випадках (див. табл. 2.4):

Таблиця 2.4

№	Властивість чисел p, m, n	Заміна
1	p — ціле число	$x = t^{\lambda}$, де λ — найменший спільний знаменник дробів m і n
2	$\dfrac{m+1}{n}$ — ціле число	$a+bx^n = t^r$, де r — знаменник дробу p
3	$\dfrac{m+1}{n}+p$ — ціле число	$ax^{-n}+b = t^r$, де r — знаменник дробу p

Зауваження. Щоб уникнути громіздких перетворень у третьому випадку, радимо скористатися формулою $a+bx^n = x^n(ax^{-n}+b)$.

5.4. Підстановки Ейлера

Інтеграл вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ виражається через раціональні функції за допомогою таких підстановок (див. табл. 2.5):

Таблиця 2.5

№	Властивість коефіцієнтів тричлена ax^2+bx+c	Заміна
1	$a > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$
2	$c > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$
3	$D = a^2 - 4ac > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$, де α — один із дійсних коренів тричлена ax^2+bx+c

Зауваження. У разі застосування підстановок Ейлера в усіх трьох випадках після того, як вибрана відповідна заміна, потрібно обидві частини рівності піднести до квадрата. З одержаної рівності після спрощень знайти вираз для x, dx, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ та підставити ці значення під знак інтеграла.

5.5. Інтеграли вигляду

$$\int \frac{dx}{(x+m)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

доцільно знаходити за допомогою оберненої заміни $\boxed{x+m=\frac{1}{t}}$.

5.6. Інтеграли вигляду

$$\int \frac{f(x)dx}{F(x)\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де $\frac{f(x)}{F(x)}$ — раціональна функція, слід розпочинати з розкладу виразу $\frac{f(x)}{F(x)}$ у суму елементарних дробів.

Знайдіть інтеграли

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-2x^2}}$.

Розв'язання. Запишемо окремо процес виділення повного квадрата:

$$1-x-2x^2=-2\left(x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)=-2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\right]=2\left[\frac{9}{16}-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2\right].$$

Тоді

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-2x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{2\left[\frac{9}{16}-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2\right]}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x+1/4)}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x+1/4}{3/4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+1}{3}+C.$$

2. $\int\frac{(x-2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+17}}$.

Розв'язання. Виділимо у чисельнику підінтегральної функції похідну від знаменника. Оскільки $(4x^2+4x+17)'=8x+4$, то запишемо чисельник підінтегральної функції так:

$$x-2=\frac{1}{8}(8x+4)-\frac{4}{8}-2=\frac{1}{8}(8x+4)-\frac{5}{2}=\frac{1}{8}(4x^2+4x+17)'-\frac{5}{2}.$$

Тоді

$$\int\frac{(x-2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+17}}=\int\frac{(\frac{1}{8}(8x+4)-\frac{5}{2})dx}{\sqrt{4x^2+4x+17}}=\frac{1}{8}\int\frac{d(4x^2+4x+17)}{\sqrt{4x^2+4x+17}}-$$

$$-\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+17}}=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+17}-\frac{5}{4}\int\frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+16}}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+17}-\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+17}\right|+C.$$

Тут ми скористалися табличними інтегралами $\int\frac{du}{2\sqrt{u}}=\sqrt{u}+C$ та $\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+C$.

3. $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Розв'язання. Найменше спільне кратне чисел два та три дорівнює числу шість, тому виконаємо заміну $x=t^6$, $dx=6t^5dt$. Тоді

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\frac{t^2}{t^3+t^4}6t^5dt=6\int\frac{t^4}{t+1}dt=6\int\frac{(t^4-1)+1}{t+1}dt=$$

$$=6\int\frac{(t^2+1)(t-1)(t+1)+1}{t+1}dt=6\int(t^2+1)(t-1)dt+6\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=6\int (t^3-t^2+t-1)dt+6\int \frac{dt}{t+1}=\frac{3}{2}t^4-2t^3+3t^2-6t+6\ln|t+1|+C=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+3\cdot\sqrt[3]{x}-6\cdot\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

4. $\int \frac{2}{(2-x)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$.

Розв'язання. Застосуємо заміну $\frac{2-x}{2+x}=t^3$. Звідси

$$x=\frac{2-2t^3}{1+t^3},\ 2-x=\frac{4t^3}{1+t^3},\ dx=-\frac{12t^2dt}{(1+t^3)^2}.$$

Отже,

$$\int \frac{2}{(2-x)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx=-\int 2\left(\frac{1+t^3}{4t^3}\right)^2\cdot t\cdot\frac{12t^2}{(1+t^3)^2}dt=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3}=$$

$$=\frac{3}{4t^2}+C=\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.$$

5. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{1+x}}dx$.

Розв'язання. Тут дробово-лінійна функція $\frac{ax+b}{cx+d}$ звелась просто до лінійної функції $1+x$. Покладемо $1+x=t^4$, тоді $x=t^4-1$, $dx=4t^3dt$. Отже,

$$\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{1+x}}dx=\int\frac{(t^4-1)^2+t^2}{t}\cdot 4t^3dt=4\int\left((t^4-1)^2+t^2\right)t^2dt=$$

$$=4\int(t^{10}-2t^6+t^2+t^4)dt=\frac{4}{11}t^{11}-\frac{8}{7}t^7+\frac{4}{3}t^3+\frac{4}{5}t^5+C=$$

$$=\frac{4}{11}\sqrt[4]{(1+x)^{11}}-\frac{8}{7}\sqrt[4]{(1+x)^7}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{(1+x)^3}+\frac{4}{5}\sqrt[4]{(1+x)^5}+C.$$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}=(x-1)(x+2)\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}}$, то підінтегральний вираз — раціональна функція від x та $\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}}$. Тому виконуємо підстановку $\dfrac{x+2}{x-1}=t^4$. Звідси

$$x=\frac{t^4+2}{t^4-1},\ x-1=\frac{3}{t^4-1},\ x+2=\frac{3t^4}{t^4-1}\ dx=-\frac{12t^3dt}{(t^4-1)^2}.$$

Тоді

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}}}=$$

$$=\int\frac{t^4-1}{3}\cdot\frac{t^4-1}{3t^4}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{-12t^3}{(t^4-1)^2}dt=-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}+C=\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$$

Інтегрування диференціальних біномів

7. $\int\sqrt{x}(3-\sqrt[3]{x})^2dx$.

Розв'язання. Маємо найпростіший випадок, структура підінтегрального виразу дає можливість провести інтегрування без заміни:

$$\int\sqrt{x}(3-\sqrt[3]{x})^2dx=\int x^{\frac{1}{2}}(9-6x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})\,dx=\int(9x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{7}{6}})\,dx=$$

$$=6x^{\frac{3}{2}}-\frac{36}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}+C.$$

8. $\int\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}-1}}{\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання. Запишемо даний інтеграл у вигляді

$$\int\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}-1}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{4}}-1)^{\frac{1}{3}}dx.$$

Тут $p=\frac{1}{3}$, $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$. Оскільки $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-1/2+1}{1/4}=2$ — ціле число, то маємо другий випадок (табл. 2.4). Виконаємо заміну $x^{\frac{1}{4}}-1=t^3$, бо знаменник p дорівнює 3. Далі маємо

$$x=(t^3+1)^4,\ dx=12(t^3+1)^3t^2dt,$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{4}}-1)^{\frac{1}{3}}dx=\int(t^3+1)^{4(-\frac{1}{2})}(t^3)^{\frac{1}{3}}\cdot 12(t^3+1)^3t^2dt=$$

$$=12\int(t^3+1)t^3dt=\frac{12}{7}t^7+3t^4+C=\frac{12}{7}\sqrt[3]{(\sqrt[4]{x}-1)^7}+3\sqrt[3]{(\sqrt[4]{x}-1)^4}+C.$$

9. $\int\frac{dx}{x^{11}\cdot\sqrt{1+x^4}}$.

Розв'язання. Запишемо інтеграл у вигляді

$$I=\int\frac{dx}{x^{11}\cdot\sqrt{1+x^4}}=\int x^{-11}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Тут $p=-\frac{1}{2}$, $m=-11$, $n=4$. Оскільки $\frac{m+1}{n}+p=-3$ — ціле число, то маємо третій випадок з табл. 2.4. Інтегрування починаємо з винесення множника x^4 з-під знака кореня:

$$I=\int\frac{dx}{x^{11}\cdot x^2\cdot\sqrt{x^{-4}+1}}=\int\frac{dx}{x^{13}\cdot\sqrt{x^{-4}+1}}.$$

Виконаємо заміну $x^{-4}+1=t^2$, $-4x^{-5}dx=2tdt$, звідси $x^{-4}=t^2-1$, $x^{-5}dx=-\frac{1}{2}tdt$. Чисельник і знаменник під знаком інтеграла множимо на x^{-5}, дістаємо

$$I=\int\frac{x^{-5}dx}{x^8\cdot\sqrt{x^{-4}+1}}=\int\frac{x^{-5}dx}{(x^{-4})^{-2}\cdot\sqrt{x^{-4}+1}}=\int\frac{-\frac{1}{2}tdt}{(t^2-1)^{-2}\cdot\sqrt{t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(t^2-1)^2dt=-\frac{1}{2}\int(t^4-2t^2+1)dt=-\frac{1}{10}t^5+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t+C=$$

$$=-\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}+C.$$

Підстановки Ейлера

10. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Розв'язання. Тут $a=1>0$, застосуємо підстановку

$$\sqrt{x^2+2x+2}=t+x\,.$$

Тоді

$$x^2+2x+2=t^2+2tx+x^2\,,\ 2x+2=t^2+2tx\,,\ x=\frac{t^2-2}{2(1-t)}\,,$$

$$dx=\frac{-t^2+2t-2}{2(1-t)^2}dt\,,\ 1+\sqrt{x^2+2x+2}=1+t+\frac{t^2-2}{2(1-t)}=-\frac{t^2}{2(1-t)}\,.$$

Після цього приходимо до інтеграла

$$\int\frac{dx}{1+\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{(-t^2+2t-2)}{2(1-t)^2}\cdot\frac{2(1-t)}{(-t^2)}dt=$$

$$=\int\frac{t^2-2t+2}{(1-t)t^2}dt\,.$$

Розкладемо тепер підінтегральну функцію на елементарні дроби:

$$\frac{t^2-2t+2}{(1-t)t^2}=\frac{t^2+2(1-t)}{(1-t)t^2}=\frac{1}{1-t}+\frac{2}{t^2}.$$

Отже,

$$\int\frac{t^2-2t+2}{(1-t)t^2}dt=2\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{1-t}=-\frac{2}{t}-\ln|t-1|+C\,.$$

Повертаючись до змінної x, дістаємо відповідь

$$\int\frac{dx}{1+\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{2}{x-\sqrt{x^2+2x+2}}-\ln\left|1+x-\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C\,.$$

11. $I=\int\dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}}\,.$

Розв'язання. Покладемо $x+1=\dfrac{1}{t}$, $dx=-\dfrac{dt}{t^2}$, дістанемо

$$I=-\int\frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+4\left(\frac{1}{t}-1\right)+2}}\frac{dt}{t^2}=-\int\frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}-1}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{2-(t-1)^2}}=-\arcsin\frac{t-1}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=-\arcsin\frac{\frac{1}{x+1}-1}{\sqrt{2}}+C=\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}(x+1)}+C\,.$$

Знайдіть інтеграли.

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+11}}$.

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

3. $\int\frac{(3x-5)dx}{\sqrt{2x^2-12x+15}}$.

4. $\int\frac{(6x+1)dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

5. $\int\frac{(2\sin x-1)\cos x dx}{\sqrt{5+4\sin x-\sin^2 x}}$.

6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

7. $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(x-1)^3}$.

8. $\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

9. $\int\sqrt{\frac{x-3}{x}}\cdot\frac{dx}{x}$.

10. $\int\frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$.

11. $\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$.

12. $\int\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$.

13. $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}dx$.

14. $\int\frac{x^7}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

15. $\int\frac{dx}{x(1+x^3)^{1/4}}$.

16. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+4}}$.

17. $\int\sqrt{x}(1+2\sqrt[6]{x})^3dx$.

18. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

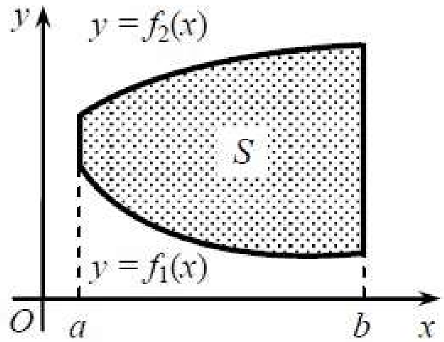
Відповіді

1. $\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+11}\right|+C$. **2.** $\arcsin\dfrac{x-1}{2}+C$. **3.** $\dfrac{3}{2}\sqrt{2x^2-12x+15}+$ $+2\sqrt{2}\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+15/2}|+C$. **4.** $-6\sqrt{x-x^2}+4\arcsin(2x+1)+C$. **5.** $-2\sqrt{5+4t-t^2}+$ $+3\arcsin(\dfrac{t-2}{3})+C$, де $t=\sin t$. **6.** $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right|+C$. **7.** $\dfrac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4}-$ $-\dfrac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^7}+C$. **8.** $\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **9.** $-2t-\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|+C$, де $t=\sqrt{\dfrac{x-3}{x}}$.
10. $\ln|x|+\dfrac{10}{\sqrt[10]{x}}-\dfrac{5}{\sqrt[5]{x}}+\dfrac{10}{3\cdot\sqrt[10]{x^3}}-\dfrac{5}{2\cdot\sqrt[5]{x^2}}-10\ln\left|1+\sqrt[10]{x}\right|+C$. **11.** $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}+C$.
12. $\dfrac{12}{7}\sqrt[3]{(\sqrt[4]{x}+1)^7}-3\sqrt[3]{(\sqrt[4]{x}+1)^4}+C$. **13.** u^3-3u+C, де $u=(1+x^{2/3})^{1/2}$. **14.** $\dfrac{t^7}{7}-\dfrac{3}{5}t^5+$ $+t^3-t+C$, де $t=\sqrt{1+x^2}$. **15.** $\dfrac{2}{3}\mathrm{arctg}\sqrt[4]{1+x^3}+\dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{\sqrt[4]{1+x^3}+1}\right|+C$. **16.** $8\ln\left|8-x+\right.$ $\left.+\sqrt{x^2-x+4}\right|-\dfrac{1}{2}\ln\left|1-2x+\sqrt{x^2-x+4}\right|+C$. **17.** $-\dfrac{1}{2}\ln|t-1|+8\ln|2t+1|-\dfrac{15}{2}\ln|t+1|+\dfrac{5}{t+1}+C$, де $t=\dfrac{\sqrt{x^2-x+4}+2}{x}$. **18.** $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{u^2+u+1}{(u-1)^2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\dfrac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, де $u=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

Тема: Застосування визначеного інтеграла для обчислення площ фігур

1. Обчислення площ плоских фігур, обмежених лініями, заданими рівняннями у декартових координатах

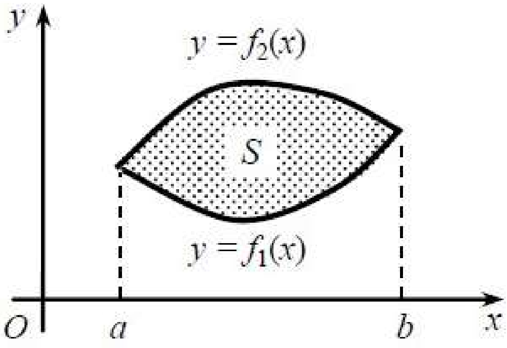
Розглянемо плоску фігуру, яка обмежена прямими $x = a$, $x = b$ і кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, де $f_1(x) \le f_2(x)$, $x \in [a; b]$. Тоді площу даної фігури обчислюють за формулою:



$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

Справді, площа утвореної плоскої фігури дорівнює різниці площ криволінійних трапецій, які обмежуються кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$. Зауважимо, що дана формула справедлива для будь-яких неперервних на $x \in [a; b]$ функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$.

Інколи прямі, які зліва і справа обмежують фігуру, можуть вироджуватись у точки перетину кривих $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$. У цьому випадку величини a і b знаходять як абсциси точок перетину вказаних кривих.



Приклад 2 Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y_1 = x^2 - 4x + 2$ і $y_2 = x - 2$.

Розв'язання:

Для обчислення площі зазначеної фігури необхідно побудувати графіки функцій, які її обмежують: $y_1 = x^2 - 4x + 2$ та $y_2 = x - 2$.

Функція $y_1 = x^2 - 4x + 2$ називається квадратичною і її графіком є парабола, а функція $y_2 = x - 2$ називається лінійною і її графіком є пряма.

Для побудови параболи будемо використовувати елементарні перетворення графіків функцій. Для цього розглянемо рівняння функції і виділимо в правій частині цього рівняння повний квадрат, тобто застосуємо формулу квадрату різниці $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$:

$$y_1 = x^2 - 4x + 2 = x^2 - 2\cdot 2\cdot x + 2^2 - 2 = (x-2)^2 - 2.$$

Спочатку будуємо параболу $y = x^2$. Для цього будуємо таблицю значень аргументу і відповідних значень функції:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Після побудови параболи $y = x^2$ виконуємо переміщення кожної точки графіка на 2 одиниці вправо і на 2 одиниці вниз (або можемо переміщувати координатні вісі).

Тепер перейдемо до побудови графіка функції $y_2 = x - 2$. Графіком даної функції є пряма і для її побудови потрібно взяти дві точки:

x	0	2
y	-2	0

Побудувавши пряму і параболу, отримуємо фігуру, площу якої необхідно знайти. Межами інтегрування будуть абсциси точок перетину параболи і прямої.

Тому нам необхідно розв’язати систему, яка складена із рівнянь функцій:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2, \\ y = x - 2; \end{cases}$$

Для знаходження абсцис точок перетину прирівнюємо праві частини рівнянь:

$$x^2 - 4x + 2 = x - 2;$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0;$$

За теоремою Вієта шукаємо розв’язки даного квадратного рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 \cdot x_2 = 4. \end{cases}$$

Маємо $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Знайдені значення визначають межі інтегрування. Отже, ми можемо записати інтеграл, який визначає площу фігури, що обмежена параболою і прямою:

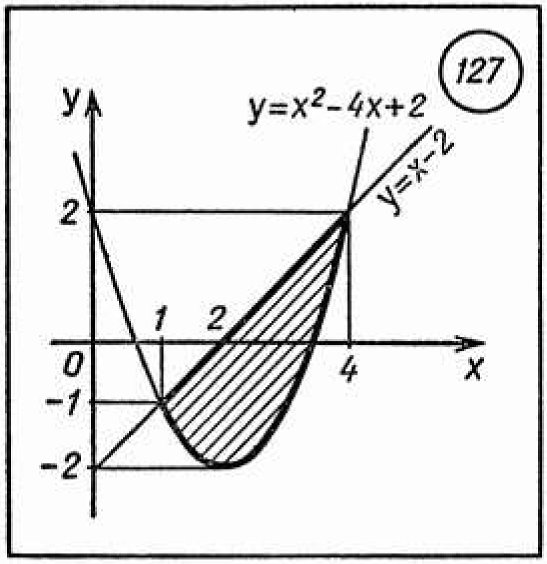
$$S = \int_1^4 \left(x - 2 - \left(x^2 - 4x + 2\right)\right)dx = \int_1^4 \left(x - 2 - x^2 + 4x - 2\right)dx = \int_1^4 \left(5x - x^2 - 4\right)dx =$$

$$= \left(5\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x\right)\Bigg|_1^4 = \left(5\cdot\frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{3} - 4\cdot 4\right) - \left(5\cdot\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - 4\cdot 1\right) =$$

$$= \left(40 - \frac{64}{3} - 16\right) - \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3} - 4\right) = 40 - \frac{64}{3} - 16 - 2{,}5 + \frac{1}{3} + 4 =$$

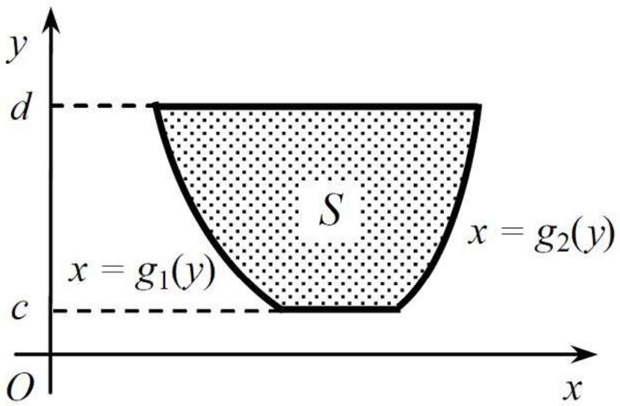
$$= 25{,}5 - \frac{63}{3} = 25{,}5 - 21 = 4{,}5 \text{ (кв. од.)}$$

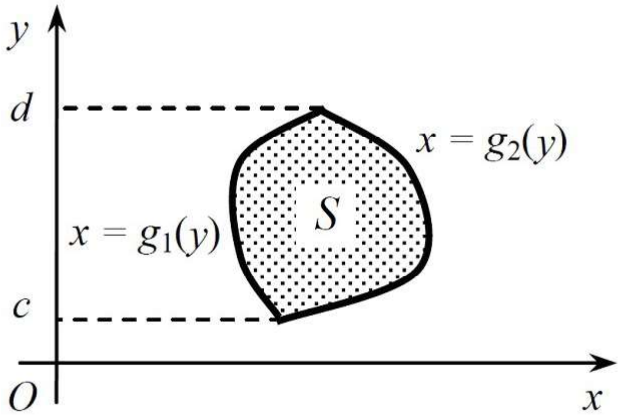
Відповідь: 4,5 кв. од.



В окремих випадках інтегрування зручніше проводити за змінною y.

Розглянемо фігуру обмежену прямими $y = c$ і $y = d$ та кривими $x = g_1(y)$ та $x = g_2(y)$, де $g_1(y) \le g_2(y)$, $y \in [c;d]$.



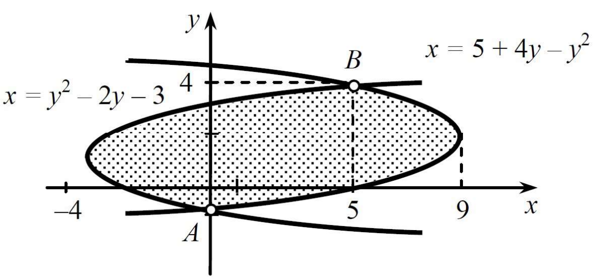


Її площу обчислюють за формулою: $S = \int\limits_c^d [g_2(y) - g_1(y)]dy$

Приклад 3 Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $x = y^2 - 2y - 3$ та $x = 5 + 4y - y^2$.

Розв'язання:

Як і в попередньому прикладі для побудови парабол використаємо метод елементарних перетворень графіків функцій. Для цього виділимо повні квадрати у правих частинах рівнянь кожної з функцій.



$x = y^2 - 2y + 1 - 4 = (y-1)^2 - 4$

$x = 5 + 4y - y^2 = -(y^2 - 4y - 5) = -(y^2 - 4y + 4 - 4 - 5) = -(y-2)^2 + 9$.

Отже, вершина першої параболи буде знаходитись в точці (–4;1), а другої – в точці (9;2).

На перетині цих функцій утворюється фігура, яка зображена на слайді і у вас на картках. Ми бачимо, що при звичному інтегруванні по змінній x область інтегрування необхідно буде розбивати на три частини.

При проведенні ж інтегрування за змінною y достатньо розглянути область, яка обмежена зверху і знизу прямими, що проходять через ординати точок перетину графіків цих функцій.

Отже, знаходимо ординати точок перетину графіків функцій:

$y^2 - 2y - 3 = 5 + 4y - y^2$;

$2y^2 - 6y - 8 = 0$;

$y^2 - 3y - 4 = 0$.

$y = -1$, $y = 4$.

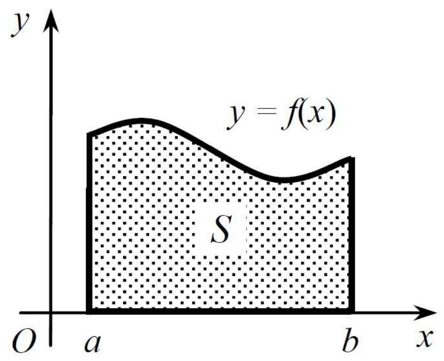
$$S = \int_{-1}^{4} \left(5 + 4y - y^2 - \left(y^2 - 2y - 3\right)\right) dy = \int_{-1}^{4} \left(8 + 6y - 2y^2\right) dy =$$

$$= \left(8y + 3y^2 - \frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{4} = 32 + 48 - \frac{128}{3} - \left(-8 + 3 + \frac{2}{3}\right) =$$

$$= 85 - \frac{130}{3} = \frac{125}{3} = 41\frac{2}{3} \text{ (кв. од.)}$$

2) Обчислення площ плоских фігур, обмежених лініями, заданими параметричними рівняннями

Розглянемо криволінійну трапецію, яка обмежена кривою $y = f(x)$ заданою параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t) \geq 0$, $t \in [\alpha; \beta]$, прямими $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ та віссю абсцис.



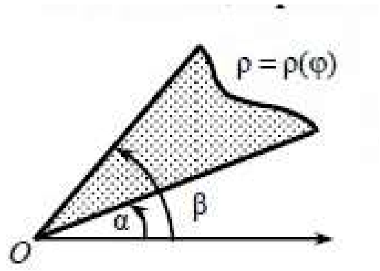
Тоді площу криволінійної трапеції визначають за формулою:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt.$$

Де межі α і β задовольняють рівняння $x(\alpha) = a$ і $x(\beta) = b$

3) Обчислення площ плоских фігур, обмежених лініями, заданими рівняннями в полярній системі координат

Розглянемо криволінійний сектор, який обмежений неперервною кривою $\rho = \rho(\varphi)$ та променями $\varphi_1 = \alpha$ та $\varphi_2 = \beta$.



Площу такого сектора, заданого рівняннями в полярній системі координат обчислюють за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi .$$

Завдання для самоконтролю

Обчислити площі плоских фігур, зображених на рисунках.